



F U N D A Ç Ã O
GETULIO VARGAS

EPGE

Escola de Pós-Graduação
em Economia

Ensaio Econômico

Escola de

Pós-Graduação

em Economia

da Fundação

Getúlio Vargas

Nº 190

ISSN 0104-8910

Hiperinflação e o Regime das Políticas Monetária-Fiscal

Elvia Mureb Sallum, Fernando de Holanda Barbosa

Março de 1992

URL: <http://hdl.handle.net/10438/885>

Os artigos publicados são de inteira responsabilidade de seus autores. As opiniões neles emitidas não exprimem, necessariamente, o ponto de vista da Fundação Getulio Vargas.

ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

Diretor Geral: Renato Fragelli Cardoso

Diretor de Ensino: Luis Henrique Bertolino Braidó

Diretor de Pesquisa: João Victor Issler

Diretor de Publicações Científicas: Ricardo de Oliveira Cavalcanti

Mureb Sallum, Elvia

Hiperinflação e o Regime das Políticas Monetária-Fiscal/
Elvia Mureb Sallum, Fernando de Holanda Barbosa - Rio de Janeiro
: FGV,EPGE, 2010

(Ensaio Econômico; 190)

Inclui bibliografia.

CDD-330

IV. HIPERINFLAÇÃO E O REGIME DAS POLÍTICAS MONETÁRIA-FISCAL

Em co-autoria com:
Elvia Mureb Sallum

1. Introdução

Uma maneira de caracterizar o regime das políticas monetária-fiscal é pela relação entre o Banco Central e o Tesouro. Neste trabalho adotamos a definição de regime de política monetária passiva como sendo aquele em que o Banco Central é obrigado a financiar o déficit do Tesouro. Em símbolos:

$$\frac{dM}{dt} = G - T$$

onde $G-T$ é o déficit público nominal e dM/dt é o acréscimo de moeda por unidade de tempo. Neste regime a taxa de expansão monetária (μ) depende do déficit real (f) do Tesouro e da quantidade real de moeda (m) que o setor privado deseja reter. Esta proposição decorre de uma simples manipulação algébrica da expressão anterior, pois:

$$\mu = \frac{dM}{dt} \frac{1}{M} = \frac{(G - T) / P}{M / P} = \frac{f}{m}$$

Nas figuras 1a e 1b o eixo vertical mede a taxa de expansão monetária e o eixo horizontal a quantidade real de moeda. A curva da Figura 1a mostra a taxa de expansão monetária necessária para financiar um dado déficit real, para cada valor da quantidade real de moeda que o público deseja reter. A questão relevante neste tipo de regime de política monetária é saber se existe ou não uma taxa de expansão monetária de equilíbrio, para a qual a economia converge.

É bastante conhecido o fato de que neste tipo de modelo é possível que existam dois pontos de equilíbrio, como os pontos A e B da Figura 1a, o ponto A de inflação alta e o ponto B de inflação baixa. Estes pontos são estáveis ou instáveis? Este regime é capaz de gerar trajetórias hiperinflacionárias, nas quais a taxa de inflação aumenta indefinidamente? Este trabalho analisa nas Seções 2 e 3, para uma economia caracterizada por inércia no sistema de preços, a dinâmica do modelo e as mudanças qualitativas (bifurcação de Hopf) que nele ocorrem quando o parâmetro (f), que mede o déficit público real, muda de valor. O modelo é bastante rico no sentido de que, dependendo dos seus parâmetros, ele pode gerar situações bem diversas como, por exemplo: i) quando o ponto A for instável ele é um ponto repulsor e a economia pode eventualmente entrar numa trajetória hiperinflacionária; ii) quando o ponto A for estável ele é um atrator e a economia pode convergir para um patamar de inflação elevada.

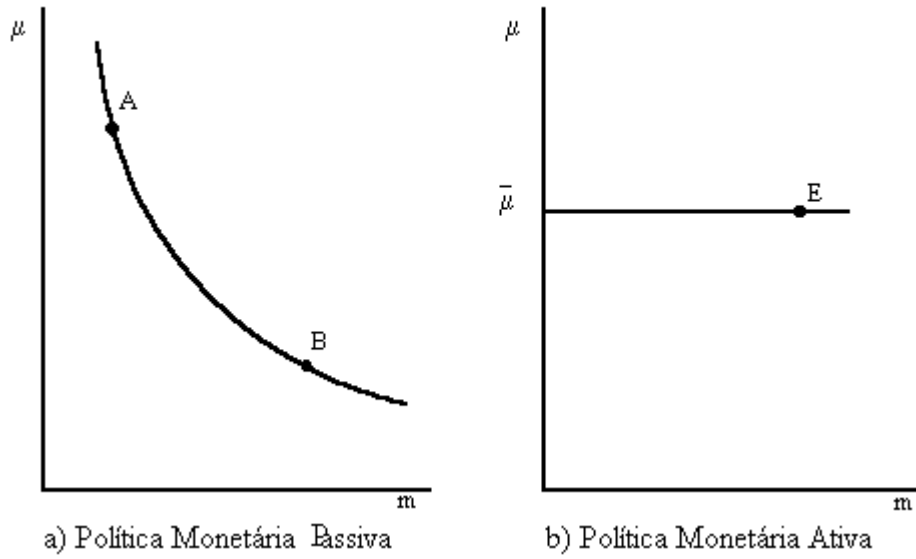


Figura 1

O regime de política monetária ativa é definido aqui como aquele em que o Banco Central é livre para escolher a taxa de expansão monetária, independente da situação do orçamento fiscal e das decisões de portfólio do setor privado. Uma pergunta relevante que cabe fazer para uma economia que opera neste regime é se a taxa de inflação converge para a taxa de expansão monetária fixada pelo Banco Central. Graficamente a questão pode ser colocada como na Figura 1b: supondo-se que o Banco Central fixa a taxa de expansão monetária em $\bar{\mu}$, em que condições a economia converge para um ponto de equilíbrio como o ponto E, em que a taxa de inflação é igual a $\bar{\mu}$? É possível neste caso, a ocorrência do fenômeno de hiperinflação? A Seção 4 deste capítulo analisa também as mudanças qualitativas (bifurcação de Hopf) que ocorrem na dinâmica da economia quando o parâmetro que mede a inércia do sistema de preços muda de valor. A Seção 5 sumaria as conclusões do trabalho.

2. Inflação e Inércia nos Preços

Esta seção apresenta um modelo em que a taxa de crescimento dos salários tem uma componente inercial, que pode ser atribuída a mecanismos de indexação ou a contratos salariais justapostos. Nos mercados de ativos as expectativas são racionais no sentido de previsão perfeita, pois as variáveis não são estocásticas, e o déficit público é financiado através da emissão de moeda.

A taxa de crescimento dos salários (ω) depende da taxa de inflação inercial (π^i) e da situação do mercado de trabalho, medida pelo hiato do produto (h). Isto é:

$$\omega = \pi^i + \delta h, \quad \delta > 0 \quad (1)$$

A taxa de inflação inercial é dada pelo seguinte mecanismo:

$$\dot{\pi}^i = \theta(\omega - \pi^i), \quad \theta > 0 \quad (2)$$

que equivale a supor-se que a inflação inercial é uma média ponderada das taxas de crescimento dos salários no passado, de acordo com:

$$\pi^i(t) = \int_{-\infty}^t s(t-\tau) \omega(\tau) d\tau$$

onde os pesos $s(t-\tau)$ são dados por:

$$s(t-\tau) = \theta e^{-\theta(t-\tau)}$$

e a soma dos mesmos é igual a um,

$$\int_{-\infty}^t s(t-\tau) d\tau = 1$$

Derivando-se (1) com relação ao tempo, e levando-se em conta (2), obtém-se:

$$\dot{\omega} = \theta \delta h + \delta \dot{h}$$

Os preços são determinados a partir de um mark-up constante sobre os custos unitários da produção. Segue-se, então, que a variação da taxa de inflação é igual a :

$$\dot{\pi} = \theta \delta h + \delta \dot{h}$$

A equação de demanda agregada, obtida combinando-se as curvas IS e LM, pode ser escrita como:

$$h = -a + b \ln m + c \pi^e$$

onde a, b e c são parâmetros positivos, c representa o efeito Mundell e b o efeito Keynes, m é o encaixe real (M/P) e π^e é a taxa de inflação esperada.

Admitindo-se previsão perfeita no mercado de ativos financeiros, a derivada de h com relação ao tempo é dada por:

$$\dot{h} = b \frac{\dot{m}}{m} + c \dot{\pi}$$

Substituindo-se as expressões de \dot{h} e de h na equação da aceleração da inflação ($\dot{\pi}$) obtém-se:

$$\dot{\pi} = \frac{\delta}{1-\delta c} \left[-a\theta + b\theta \ln m + c\theta \pi + b \frac{\dot{m}}{m} \right] \quad (3)$$

Esta equação sintetiza o comportamento da economia, no mercado de bens e serviços, no mercado de moeda, na formação de preços e na determinação dos salários no mercado de mão-de-obra. Para completar-se o modelo é preciso especificar o regime das políticas monetária-fiscal, o que será feito na seção seguinte.

A aceleração da inflação neste modelo ocorre porque existe excesso de demanda ($h > 0$) ou porque a capacidade ociosa da economia está diminuindo ($\dot{h} > 0$). Nas

experiências hiperinflacionárias de vários países observou-se três fatos estilizados: i) a capacidade ociosa aumentou; ii) o salário real diminuiu e iii) a dispersão de preços relativos também aumentou. Estes fatos podem ser acomodados numa curva de Phillips, que siga as sugestões de Friedman (1977), de acordo com a seguinte especificação:

$$\pi_t = (1 + \alpha) \pi_t^e + \delta G(h_t)$$

onde α e β são parâmetros e $G(h)$ é uma função com as seguintes propriedades: $G(0) = 0$, $G'(h) > 0$. Quando α for positivo existe uma correlação positiva, no longo prazo, entre inflação e capacidade ociosa, pois se $\pi_t^e = \pi_t$, tem-se que:

$$\pi_t = -\frac{\delta}{\alpha} G(h_t)$$

O termo $\alpha \pi_t^e$ da curva de Phillips pode ser interpretado como uma proxy para o efeito do aumento da dispersão de preços na taxa de inflação, e é plausível que o coeficiente α varie com a própria taxa de inflação.

Friedman (1977) descreveu três fases no desenvolvimento da curva de Phillips. Na primeira fase admitiu-se que o parâmetro estaria compreendido entre zero e menos um ($-1 < \alpha < 0$), e que portanto existiria uma relação de trocas, no longo prazo, entre capacidade ociosa e inflação. Na segunda fase argumentou-se que o coeficiente era igual a zero, e que inexistiria, no longo prazo, qualquer relação de trocas entre inflação e capacidade ociosa. Na terceira fase, o desenvolvimento teórico levaria a uma curva de Phillips em que a inflação seria prejudicial ao nível de atividade, e a neutralidade da moeda no longo prazo não se verificaria, como acontece quando a curva de Phillips é vertical.

A combinação da curva de Phillips anterior fazendo-se $G(h)=h$, com um mecanismo que supõe inércia no sistema de preços, como o de expectativas adaptativas,

$$\dot{\pi}^e = \theta (\pi - \pi^e).$$

conduz à seguinte equação para a aceleração da taxa de inflação:

$$\dot{\pi} = \alpha \theta \pi + \delta \theta h + \delta \dot{h}$$

Substituindo-se h e \dot{h} , da equação de demanda agregada, nesta expressão obtém-se:

$$\dot{\pi} = \frac{\delta}{1 - \delta c} \left(-a \theta + b \theta \ln m + \left(c + \frac{\alpha}{\delta} \right) \theta \pi + b \frac{\dot{m}}{m} \right)$$

que é igual à equação (3) quando $\alpha=0$. A análise que será apresentada nas próximas seções utiliza a especificação da equação (3). Todavia, os resultados qualitativos permanecem os mesmos quando se usa esta equação de $\dot{\pi}$ pois as duas equações não são diferentes do ponto de vista formal, e o modelo é consistente com os fatos estilizados que ocorreram nas hiperinflações.

3. Equilíbrio e Dinâmica da Inflação com Déficit Público Financiados por Moeda

O déficit público real é constante e inteiramente financiado pela emissão de moeda:

$$f = \frac{G - T}{P} = \frac{\dot{M}}{P}$$

onde G é o total das despesas do governo, T é a receita tributária, P é o índice de preços e \dot{M} é o acréscimo do estoque nominal de moeda. Derivando-se com relação ao tempo ambos os membros da identidade $m \equiv M/P$ e substituindo-se o valor de \dot{M}/P dado pela equação anterior, obtém-se:

$$\dot{m} = f - m \pi \quad (4)$$

Substituindo-se este valor de \dot{m} na equação (3) resulta:

$$\dot{\pi} = \frac{\delta}{1 - \delta c} \left[-a \theta + b \theta \ln m + (c \theta - b) \pi + \frac{bf}{m} \right] \quad (5)$$

O modelo de inflação é formado pelo sistema de equações diferenciais (4) e (5). Os pontos de equilíbrio ($\dot{m} = 0$ e $\dot{\pi} = 0$) são obtidos pelas soluções da equação:

$$g(m) = m(a - b \ln m) = c f$$

A condição necessária e suficiente para que existam dois pontos de equilíbrio (m_A, π_A) e (m_B, π_B) é que:

$$f < \frac{b}{c} e^{\frac{a-b}{b}}$$

Neste trabalho consideramos apenas o caso em que esta desigualdade é satisfeita. Segue-se então, que:

$$m_A < e^{\frac{a-b}{b}} < m_B < e^{\frac{a}{b}}$$

Na Figura 2 observamos que m_A cresce e m_B decresce quando o déficit público real f aumenta. Além disso temos que $m'_A(f) > 0$ e $m'_B(f) < 0$ desde que $g'(m) > 0$ para $m \in \exp[(a-b)/b]$. Como os pontos de equilíbrio obedecem à relação,

$$-a \theta + b \theta \ln m + (c \theta - b) \pi + b = 0$$

então $\pi'_A(f) < 0$ e $\pi'_B(f) > 0$. Portanto, π_A decresce e π_B cresce quando f aumenta.

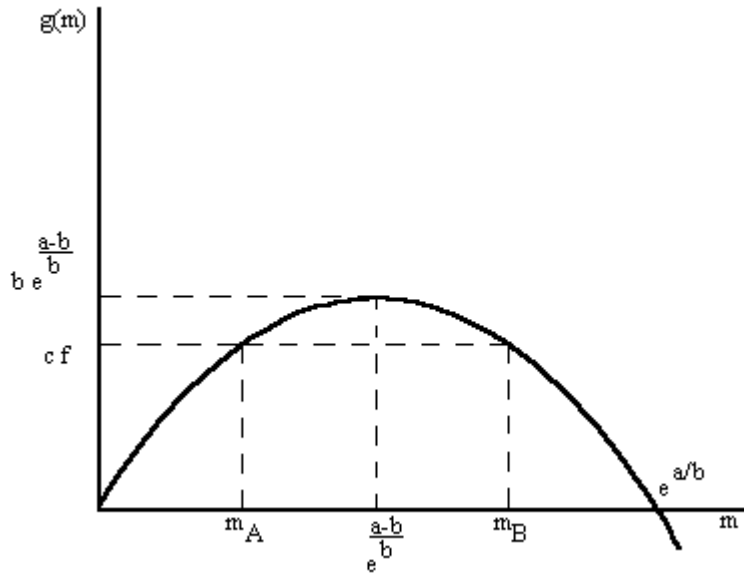


Figura 2

Na Figura 3 apresentamos as curvas $\dot{m}=0$ e $\dot{\pi}=0$ no caso limite em que $f = \frac{b}{c} e^{\frac{a-b}{c}}$, conforme a variação de Θ c-b.

Na Figura 4 apresentamos os diagramas de fase do sistema de equações diferenciais quando existem dois pontos de equilíbrio, o ponto A de inflação elevada e o ponto B de inflação baixa.

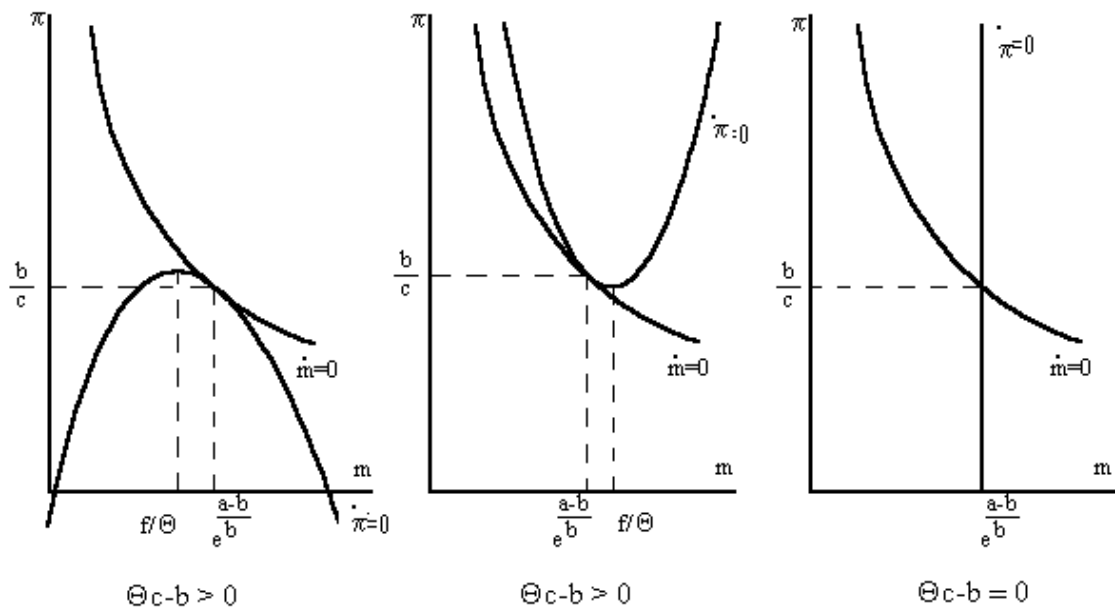


Figura 3

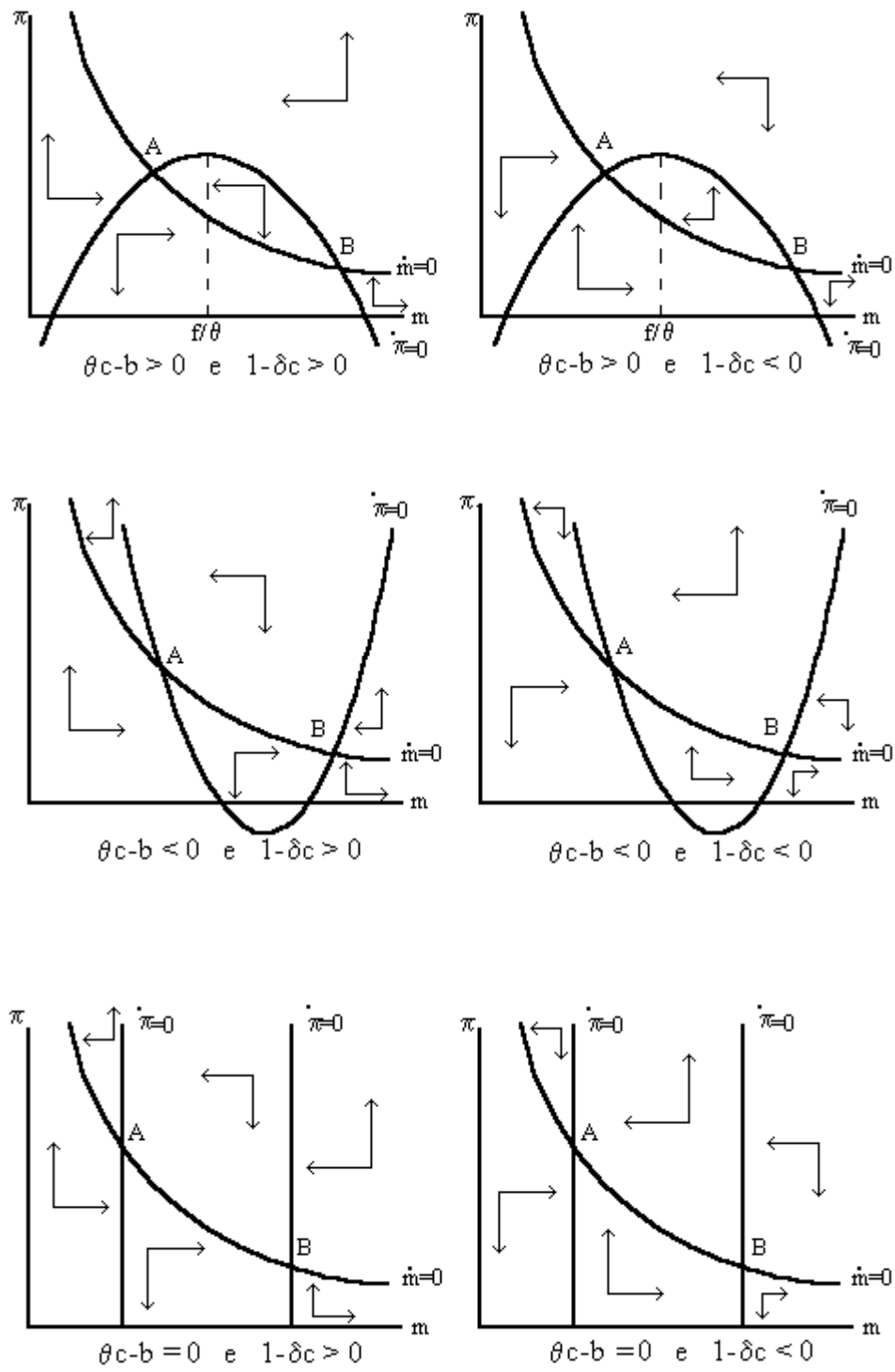


Figura 4

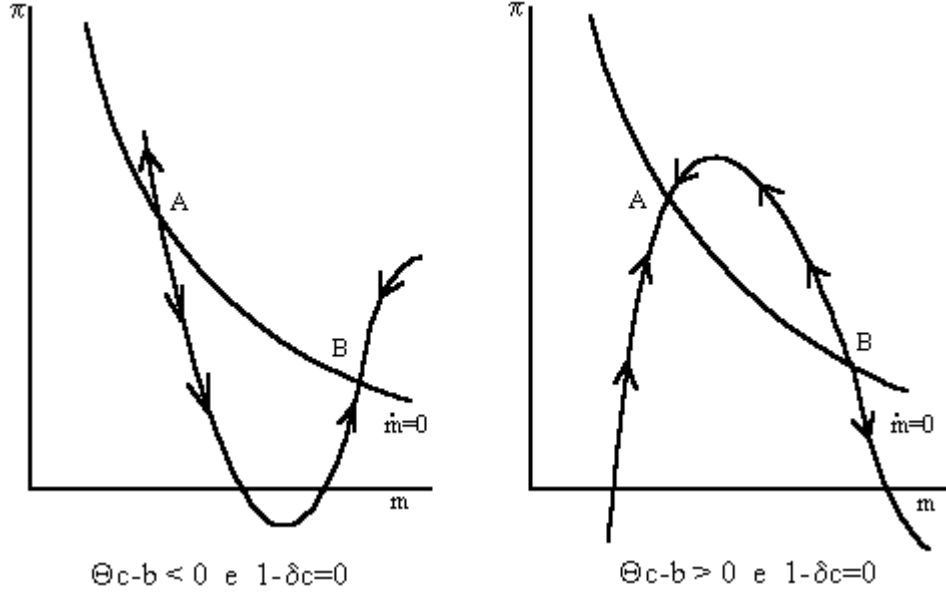


Figura 4 (cont.)

A matriz jacobiana do sistema num ponto (m, π) é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} -\pi & -m \\ \frac{\delta b(\theta m - f)}{(1 - \delta c)m^2} & \frac{\delta(\theta c - b)}{1 - \delta c} \end{bmatrix}$$

O determinante e o traço dessa matriz, nos pontos de equilíbrio, são dados, respectivamente, por:

$$|J| = \frac{\delta \theta (b - \pi c)}{1 - \delta c} \quad e \quad \text{tr } J = -\pi + \frac{\delta(\theta c - b)}{1 - \delta c}$$

Consideremos em primeiro lugar o caso em que $1 - \delta c > 0$. O ponto de equilíbrio A, de inflação elevada, é um ponto de sela porque $|J_A| < 0$, em virtude de $b - \pi_A c < 0$. No ponto de equilíbrio B de inflação baixa, o determinante da matriz jacobiana é positivo, $|J_B| > 0$, pois $b - \pi_B c > 0$.

Quando $\theta c - b \leq 0$ temos que $\text{tr } J_B < 0$ e, portanto, o ponto B é um poço. Para $\theta c - b > 0$, a condição necessária e suficiente para que exista um valor do déficit público real $f = f_0$ para o qual $\text{tr } J_B = 0$ é que

$$\gamma = \frac{\delta(\theta c - b)}{1 - \delta c} < \frac{b}{c}$$

ou, equivalentemente, que:

$$\delta \theta c^2 < b$$

e neste caso,

$$f_0 = \gamma e^{\frac{a-c}{b} \gamma}$$

Quando $\theta c - b > 0$ e $c \gamma \geq b$ temos $\text{tr } J_B > 0$ e, portanto, o ponto B é uma fonte. Para $\theta c - b > 0$ e $c \gamma < b$ o ponto de equilíbrio B será fonte quando $f < f_0$ e poço para $f > f_0$. A Figura 5 mostra, neste caso, como o $\text{tr } J_B$ varia com a taxa de inflação π_B .

Ainda no caso em que $\theta c - b > 0$ e $c \gamma < b$ mostra-se no Apêndice as verificações necessárias, segundo Marsden-McCracken (1976), que garantem a existência de uma bifurcação de Hopf para o sistema de equações diferenciais quando $f = f_0$. O ponto de equilíbrio B será um atrator não hiperbólico e para cada parâmetro f suficientemente próximo de f_0 , com $f < f_0$, aparece uma órbita periódica atratora envolvendo a fonte hiperbólica B.

Consideremos agora o caso em que $1 - \delta c < 0$. As afirmações que se seguem foram obtidas repetindo-se a análise anterior, quando admitiu-se $1 - \delta c > 0$, levando-se em conta que $c \pi_A > b$ e que π_A decresce quando f aumenta.

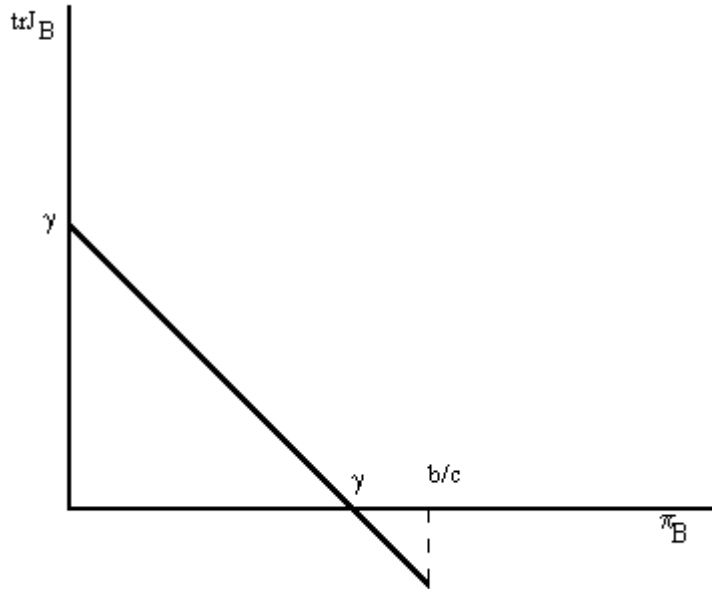


Figura 5

O ponto de equilíbrio B, que corresponde à taxa de inflação baixa, é um ponto de sela. No ponto de equilíbrio A, de taxa de inflação elevada, o determinante da matriz jacobiana é positivo, $|J_A| > 0$. Quando $\theta c - b \geq 0$ o ponto de equilíbrio A é um atrator. Para $\theta c - b < 0$, temos que: i) se $c \gamma \leq b$, então, o ponto de equilíbrio A é atrator; ii) se $c \gamma > b$, ou equivalentemente, $\delta \theta c^2 < b$, então o ponto A é um poço para $f < f_0$ e uma fonte para $f > f_0$ onde $f_0 = \gamma \exp(\frac{a-c}{\gamma})$. Quando $f = f_0$ o sistema admite uma bifurcação de Hopf no ponto A, que é um atrator não hiperbólico. Para f suficientemente próximo de f_0 , com $f > f_0$, o sistema admite uma órbita periódica atratora envolvendo o ponto A.

A Figura 6 contém um resumo da análise desenvolvida até aqui do sistema de equações diferenciais. Quando $1 - \delta c > 0$ chegamos às seguintes conclusões: i) o ponto A de

inflação elevada é um ponto de sela; ii) para $\theta c - b \leq 0$ o ponto B de inflação baixa é um poço; iii) para $\theta c - b > 0$ e $c\gamma < b$ o ponto B é uma fonte se $f < f_0$, envolvido por órbita periódica atratora se f é suficientemente próximo de f_0 , para $f = f_0$ ocorre uma bifurcação de Hopf e o ponto B é um atrator, e para $f > f_0$ o ponto B é um poço; iv) quando $\theta c - b > 0$ e $c\gamma \geq b$ o ponto B é uma fonte.

Quando $1 - \delta c < 0$ as conclusões são as seguintes: i) o ponto B de inflação baixa é um ponto de sela; ii) para $\theta c - b \geq 0$, o ponto A de inflação elevada é um poço; iii) quando $\theta c - b < 0$ e $c\gamma \leq b$ o ponto A é um poço; iv) para $\theta c - b < 0$ e $c\gamma > b$ o ponto A é um poço se $f < f_0$, se $f = f_0$ ocorre uma bifurcação de Hopf e o ponto é atrator, e se $f > f_0$ o ponto A é uma fonte envolvida por órbita periódica atratora para f suficientemente próximo de f_0 .

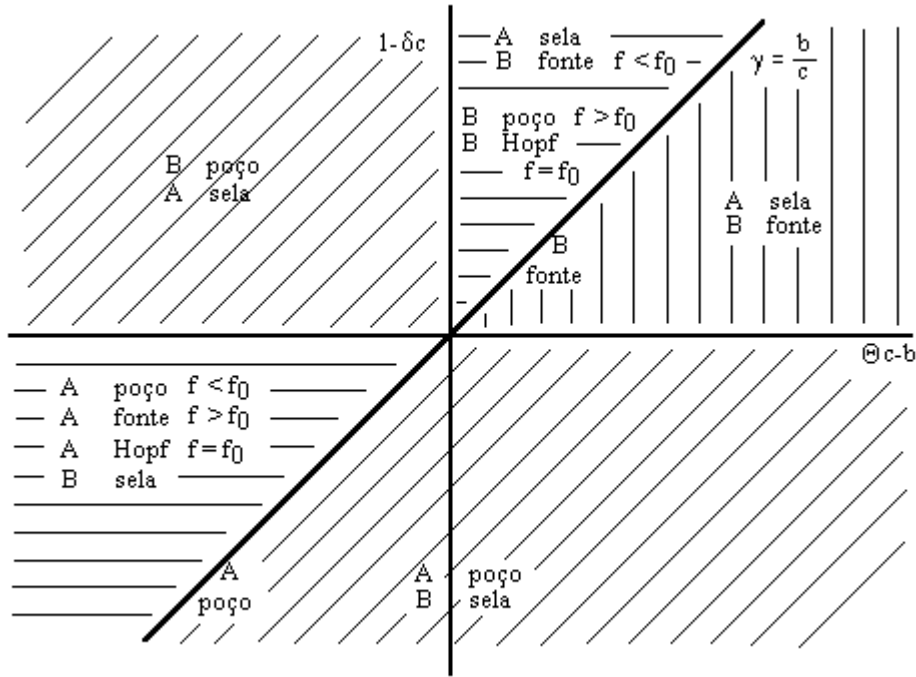


Figura 6

4. Equilíbrio e Dinâmica da Inflação com Controle de Oferta de Moeda

Esta seção apresenta um modelo semelhante ao da segunda seção, mas com uma diferença no regime das políticas monetária e fiscal. No regime que analisamos em seguida, o Banco Central controla a taxa de expansão monetária e não mais financia o déficit do governo. A equação diferencial do encaixe real é obtida diferenciando-se com relação ao tempo $m = M/P$ e admitindo-se que a taxa de expansão monetária $\dot{M}/M = \mu$ é o parâmetro de política monetária tem-se:

$$\dot{m} = m(\mu - \pi) \quad (6)$$

Substituindo-se este valor de \dot{m} na equação (3), resulta:

$$\dot{\pi} = \frac{\delta}{1 - \delta c} [-a\theta + b\theta \ln m + (c\theta - b)\pi + b\mu] \quad (7)$$

O modelo agora é formado pelo sistema de equações diferenciais (6) e (7), cuja matriz jacobiana no ponto (m,) é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \mu - \pi & -m \\ \frac{\delta b \theta}{(1 - \delta c)m} & \frac{\delta(c\theta - b)}{1 - \delta c} \end{bmatrix}$$

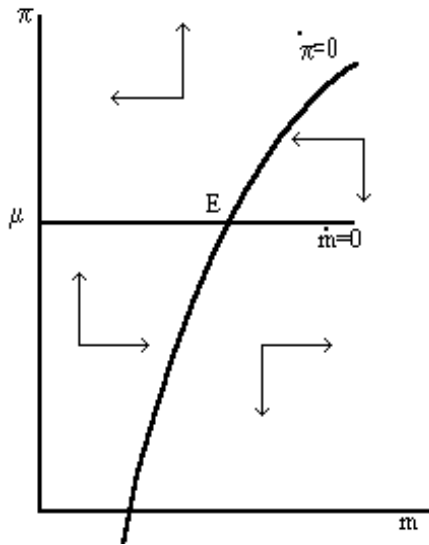
O determinante e o traço dessa matriz, no ponto de equilíbrio, são iguais a:

$$|J| = \frac{\delta b \theta}{1 - \delta c} \quad e \quad tr J = \frac{\delta(c\theta - b)}{1 - \delta c}$$

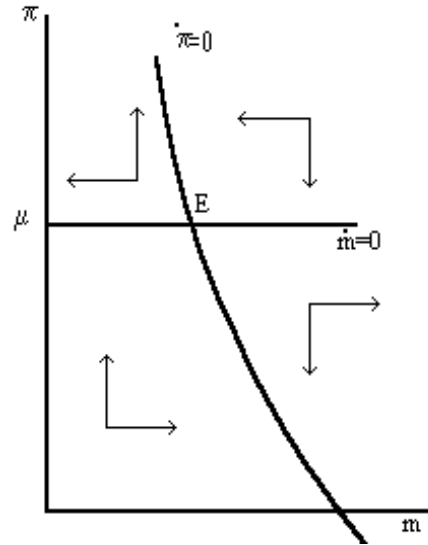
Consideremos em primeiro lugar o caso em que $1 - \delta c < 0$. Nestas circunstâncias $|J| < 0$ e o ponto de equilíbrio é um ponto de sela. As Figuras 7I e 7II apresentam os diagramas de fases neste caso, em duas situações, para $b \gtrless c\theta$

Consideremos agora o caso em que $1 - \delta c > 0$. Com esta hipótese $|J| > 0$ e o ponto de equilíbrio será um poço se $tr J < 0$ e uma fonte quando $tr J > 0$. A primeira hipótese ocorre quando $c\theta < b$ e a segunda se $c\theta > b$. As Figuras 7III e 7IV mostram os diagramas de fases correspondentes a esses dois casos.

As Figuras 7V e 7VI mostram os diagramas de fases do modelo quando $1 - \delta c = 0$. Nestas circunstâncias, se $b > c\theta$ a economia converge para o ponto de equilíbrio E e quando $b < c\theta$ o equilíbrio é instável.



I) $1 - \delta c < 0$ e $b - c > 0$



II) $1 - \delta c < 0$ e $b - c < 0$

Figura 7

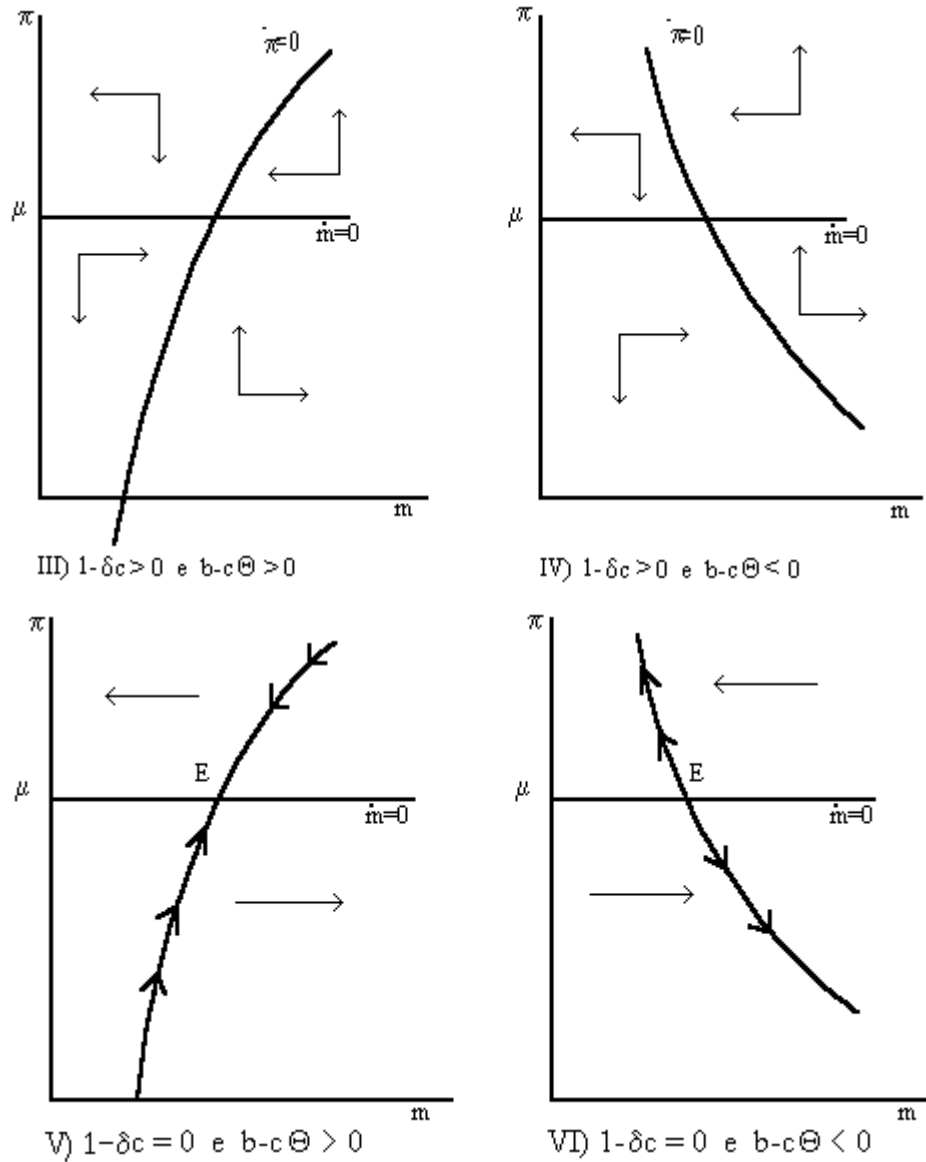


Figura 7 (cont.)

O parâmetro θ representa a inércia do sistema de preços e quando ele aumenta a inércia diminui. A variação deste parâmetro pode alterar a dinâmica do modelo. Com efeito, quando $\theta = b/c$, o traço da matriz jacobiana do sistema de equações diferenciais se anula e a derivada do traço com relação ao parâmetro θ é diferente de zero, pois:

$$\frac{d \operatorname{tr}}{d \theta} = \frac{c \delta}{1 - \delta c} > 0$$

Neste caso ($\theta = \frac{b}{c}$ e $1 - \delta c > 0$), na região onde \dot{m} não se anula, as soluções podem ser dadas por $\pi = \pi(m)$, com

$$\frac{d\pi}{dm} = \frac{-k + \beta \ln m + \frac{\beta\mu}{\theta}}{m(\mu - \pi)} \quad \text{onde} \quad \beta = \frac{b\theta\delta}{1-\delta c} \quad e \quad k = \frac{a\theta\delta}{1-\delta c}$$

Por integração concluímos que as soluções obedecem à:

$$\pi^2 - \mu\pi + \frac{\beta}{2} (\ln m)^2 - (k - \frac{\beta\mu}{\theta}) \ln m = c$$

onde c constante, e, portanto, são periódicas.

5. Conclusões

O Quadro I sumaria as várias possibilidades de ocorrência de hiperinflação e hiperdeflação no modelo analisado neste trabalho, de acordo com o regime da política monetária.

Quadro 1

Possibilidades de Hiperinflação e Hiperdeflação

Parâmetros do Modelo	Regimes de Política Monetária	
	Passiva	Ativa
$1 - \delta c > 0$	Hiperinflação	Hiperinflação ($\theta > \frac{b}{c}$ e $\gamma < \frac{b}{c}$)
		Hiperdeflação
$1 - \delta c < 0$	Hiperdeflação	Hiperdeflação ($\theta \neq \frac{b}{c}$)
		Hiperinflação
$1 - \delta c = 0$	Hiperinflação ($\theta < \frac{b}{c}$)	Hiperdeflação ($\theta > \frac{b}{c}$)
	Hiperdeflação ($\theta > \frac{b}{c}$)	Hiperinflação

Quando o Banco Central financia o déficit público através da emissão de moeda, no regime de política monetária passiva, a hiperinflação pode ocorrer: i) quando $1-\delta c > 0$, independente do grau de inércia do sistema de preços e ii) quando $1-\delta c = 0$ e $\theta < b/c$. Nestes dois casos o equilíbrio de inflação alta é instável. Por outro lado, se $1-\delta c < 0$ não há possibilidade de hiperinflação, o ponto de inflação baixa é instável e existe a possibilidade de hiperdeflação, que também pode ocorrer se, $1-\delta c = 0$ e $\theta > b/c$.

Quando o Banco Central é livre para escolher a taxa de expansão monetária, no regime de política monetária ativa, a hiperinflação pode ocorrer nas seguintes circunstâncias: i) se $1 - \delta c > 0$ $\theta > b/c$ e $\gamma = \frac{(\theta c - b)\delta}{1 - \delta c} < \frac{b}{c}$; ii) quando $1-\delta c < 0$ e iii)

se $1-\delta c=0$ e $\theta > b/c$. Por outro lado a hiperinflação é possível quando i) $1-\delta c < 0$ ii) $1-\delta c = 0$ e $\theta > b/c$; iii) $1-\delta c > 0$, $\theta > \frac{b}{c}$ e $\gamma < \frac{b}{c}$.

O regime de política monetária afeta, portanto, não somente o equilíbrio mas a própria dinâmica do modelo. A evidência empírica dos fenômenos hiperinflacionários é de que eles não ocorreram por combustão espontânea, através do aumento da velocidade da moeda, como aconteceria no regime de política monetária ativa.

Nas hiperinflações observa-se que a taxa de expansão monetária aumenta e que a velocidade-renda da moeda também cresce, contribuindo para a aceleração da taxa de inflação. Estes fatos são consistentes com o modelo do regime de política monetária passiva. A conclusão que se chega é de que o combate a um processo hiperinflacionário requer uma mudança no regime de política monetária, através de reformas que permitam ao Banco Central controlar efetivamente o estoque de moeda.

Apêndice A

Neste apêndice faremos as verificações necessárias, segundo Marsden-McCracken (1976), para o caso em que $1-\delta c > 0$, $\theta c - b > 0$ e $c\gamma < b$, que garantem a existência de uma bifurcação de Hopf para o sistema de equações diferenciais (4),(5) quando $f = f_0$. As curvas

$$\lambda(f) = \frac{\text{tr } J_B + \sqrt{\text{tr}^2 J_B - 4|J_B|}}{2}$$

dos autovalores no ponto B cortam o eixo imaginário transversalmente em $\lambda(f_0) = \pm i \sqrt{|J_B|}$, já que:

$$\frac{d}{df} \text{Re } \lambda(f) = \frac{1}{2} \frac{d}{df} \text{tr } J_B(f) = -\frac{d \pi_B(f)}{df} \neq 0$$

Por intermédio da mudança de coordenadas, $m = X + m_B$ e $\pi = Y + \pi_B$ que translada a origem de coordenadas para o ponto de equilíbrio B, transformamos o sistema de equações diferenciais, com $f = f_0$, em:

$$\begin{cases} \dot{X} = F_1(X, Y) \\ \dot{Y} = F_2(X, Y) + \varphi(X) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde:

$$F_1 = -XY - \frac{f_0}{\gamma} Y - \gamma X$$

$$F_2 = \beta \ln\left(\frac{\gamma^X}{f_0} + 1\right) + \gamma Y$$

$$\varphi = \frac{\beta f_0}{\theta(X + \frac{f_0}{\gamma})} + \gamma^2 + \beta \ln \frac{f_0}{\gamma} - k$$

$$\beta = \frac{b \theta \delta}{1 - \delta c} ; \gamma = \frac{(\theta c - b) \delta}{1 - \delta c} ; k = \frac{a \theta \delta}{1 - \delta c}$$

A matriz jacobiana do sistema de equações diferenciais (A.1) na origem é igual a:

$$J = \begin{bmatrix} -\gamma & -\frac{f_0}{\gamma} \\ \frac{\beta \gamma}{f_0} (1 - \frac{\gamma}{\theta}) & \gamma \end{bmatrix}$$

e tem como autovalores $\pm i \sqrt{\lambda_0}$, onde:

$$\lambda_0 = \beta(1 - \frac{\gamma}{\theta}) - \gamma^2 = |J_B| > 0$$

A seguinte mudança de coordenadas,

$$\begin{cases} X = a + B b \\ Y = -A B b \end{cases}$$

onde:

$$B = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda_0}}, A = \frac{\alpha \beta}{f_0}, \lambda_0 = \beta \alpha - \gamma^2, \alpha = 1 - \frac{\gamma}{\theta}$$

transforma o sistema de equações diferenciais (A.1) em:

$$\begin{cases} \dot{a} = F_1 + \frac{1}{AB} (F_2 + \varphi) = \hat{X}_1(a, b) \\ \dot{b} = -\frac{1}{AB} (F_2 + \varphi) = \hat{X}_2(a, b) \end{cases}$$

cujas matrizes jacobianas na origem são dadas por:

$$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\lambda_0} \\ -\sqrt{\lambda_0} & 0 \end{bmatrix}$$

Para aplicar-se a fórmula $V'''(0)$, da página 126 de Marsden-McCracken (1976) tem-se que computar as seguintes derivadas parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \hat{X}_1}{\partial a^3} (0,0) &= \frac{1}{A} \frac{2\beta\gamma^3}{f_0^3} \left(1 - \frac{2\gamma}{\theta}\right) \\
\frac{\partial^3 \hat{X}_1}{\partial a \partial b^2} (0,0) &= \frac{\beta^2}{A} \frac{2\beta\gamma^3}{f_0^3} \left(1 - \frac{2\gamma}{\theta}\right) \\
\frac{\partial^3 \hat{X}_2}{\partial a^2 \partial b} (0,0) &= -\frac{1}{A} \frac{2\beta\gamma^3}{f_0^3} \left(1 - \frac{2\gamma}{\theta}\right) \\
\frac{\partial^3 \hat{X}_2}{\partial b^3} (0,0) &= -\frac{B^2}{A} \frac{2\beta\gamma^3}{f_0^3} \left(1 - \frac{2\gamma}{\theta}\right) \\
\frac{\partial^2 \hat{X}_1}{\partial a^2} (0,0) &= \frac{1}{A} \frac{\beta\gamma^2}{f_0^2} \left(\frac{2\gamma}{\theta} - 1\right) \\
\frac{\partial^2 \hat{X}_1}{\partial a \partial b} (0,0) &= B \left[A + \frac{1}{A} \frac{\beta\gamma^2}{f_0^2} \left(\frac{2\gamma}{\theta} - 1\right) \right] \\
\frac{\partial^2 \hat{X}_2}{\partial b^2} (0,0) &= \frac{-B}{A} \frac{\beta\gamma^2}{f_0^2} \left(\frac{2\gamma}{\theta} - 1\right) \\
\frac{\partial^2 \hat{X}_2}{\partial a \partial b} (0,0) &= -\frac{1}{A} \frac{\beta\gamma^2}{f_0^2} \left(\frac{2\gamma}{\theta} - 1\right) \\
\frac{\partial^2 \hat{X}_2}{\partial a^2} (0,0) &= -\frac{1}{AB} \frac{\beta\gamma^2}{f_0^2} \left(\frac{2\gamma}{\theta} - 1\right) \\
\frac{\partial^2 \hat{X}_1}{\partial b^2} (0,0) &= B^2 \left[2A + \frac{1}{A} \frac{\beta\gamma^2}{f_0^2} \left(\frac{2\gamma}{\theta} - 1\right) \right] \\
\frac{\partial^2 \hat{X}_2}{\partial b^2} (0,0) &= -\frac{B}{A} \frac{\beta\gamma^2}{f_0^2} \left(\frac{2\gamma}{\theta} - 1\right)
\end{aligned}$$

Aplicando-se, então, a fórmula de $V'''(0)$, chega-se à seguinte expressão;

$$V'''(0) = -\frac{3\pi\beta^2\gamma^3\alpha}{4\lambda_0^2\sqrt{\lambda_0}f_0^2} < 0$$

Apêndice B

Com as anotações do apêndice anterior, fazendo-se a mudança de coordenadas $X=\log m$ e $Y=\pi$ o sistema (4),(5) se escreve como:

$$\begin{cases} \dot{X} = f e^{-X} - Y \\ \dot{Y} = -k + \beta X + \gamma Y + \frac{\beta}{\theta} f e^{-X} \end{cases}$$

As trajetórias deste sistema, num domínio em que \dot{X} não se anula, são dadas por $Y=Y(X)$ onde

$$Y'(X) = \frac{-k + \beta X + \gamma Y + \frac{\beta}{\theta} f e^{-X}}{f e^{-X} - Y}$$

Elas não têm assíntota vertical pois se $\lim_{X \rightarrow X_0} Y(X) = \pm \infty$ então teríamos $\lim_{X \rightarrow X_0} Y'(X) = -\gamma$.

Além disso, elas não tem assíntota horizontal pois se $\lim_{X \rightarrow \infty \text{ ou } -\infty} Y(X) = Y_0$, teríamos:

$$\lim_{Y \rightarrow Y_0} X'(Y) = \lim_{Y \rightarrow Y_0} \frac{f e^{-X} - Y}{-k + \beta X + \gamma Y + \frac{\beta}{\theta} f e^{-X}} = 0 \text{ ou } \frac{\theta}{\beta}$$

Podemos concluir que existem trajetórias de hiperdeflação para $1-\delta c < 0$, mas não para $1-\delta c > 0$ e $\theta c \leq 0$; e que existem trajetórias de hiperinflação para $1-\delta c > 0$, mas não para $1-\delta c < 0$ e $\theta c - b \geq 0$.

Sendo $\bar{Y}(X) = \frac{1}{\gamma} (k - \beta X - \frac{\beta}{\theta} f e^{-X})$ a curva dos pontos onde $\dot{Y} = 0$, temos:

$$(Y - \bar{Y})'(X) = \frac{-k + \beta X + \gamma Y + \frac{\beta}{\theta} f e^{-X}}{f e^{-X}} + \frac{\beta}{\gamma} (1 - \frac{f}{\theta} e^{-X})$$

Suponhamos $\theta c - b > 0$, $1-\delta c > 0$ e $\gamma^2 < \beta$. Na região onde $\dot{X} > 0$ e $X > \ln \frac{f}{\theta(1 - \frac{\gamma^2}{\beta})}$

temos que $(Y - \bar{Y})'(X) > 0$ se e somente se $Y < \varphi(X)$ onde

$$\varphi(X) = \frac{\beta}{\beta(1 - \frac{f e^{-X}}{\theta}) - \gamma^2} \left[(1 - \frac{f e^{-X}}{\theta}) f e^{-X} - \frac{\gamma^2}{\beta} \bar{Y}(X) \right]$$

Observamos que o gráfico de φ passa pelos pontos críticos do sistema e que $\lim_{X \rightarrow \pm \infty} \varphi(X) = +\infty$.

Como

$$Y''(X) = \frac{(f e^{-X} - Y)(\beta + \gamma Y' - \frac{\beta}{\theta} f e^{-X}) + (f e^{-X} + Y')(-k + \beta X + \gamma Y + \frac{\beta}{\theta} f e^{-X})}{(f e^{-X} - Y)^2}$$

podemos escrever

$$(f e^{-X} - Y)Y'' = \omega^2 + (\gamma + f e^{-X})\omega + \beta(1 - \frac{f e^{-X}}{\theta}) \quad (\text{B.1})$$

onde $\omega = Y'(X)$. Teremos $\Delta = (\gamma + f e^{-X})^2 - 4\beta(1 - \frac{f e^{-X}}{\theta}) < 0$ se e somente se

$v^2 + 2(\gamma + 2(\gamma + \frac{2\beta}{\theta})v + \gamma^2 - 4\beta) < 0$ onde $v = f e^{-X}$. Como

$\bar{\Delta} = 4 \left[\left(\gamma + \frac{2\beta}{\theta} \right)^2 - \gamma^2 + 4\beta \right] = 16\beta \left(\frac{\gamma}{\theta} - \frac{\beta}{\theta} + 1 \right) > 0$, então, teremos $\Delta < 0$ se $f e^{-X} < \bar{v}$ onde

$$\bar{v} = -\left(\gamma + \frac{2\beta}{\theta}\right) + \sqrt{\left(\gamma + \frac{2\beta}{\theta}\right)^2 - \gamma^2 + 4\beta}$$

ou seja, desde que $X > \ln f \sqrt{v}$.

Concluimos que $Y'' > 0$ na região onde $\dot{X} > 0$ e $X > \ln \frac{f}{v}$. Estas considerações nos levam a deduzir que não existem trajetórias de hiperdeflação no caso $\theta - b > 0$, $1 - \delta c > 0$ e $\gamma^2 < \beta$.

Suponhamos agora que $\theta c - b < 0$ e $1 - \delta c < 0$. Na região onde $\dot{X} < 0$, $X < \ln \frac{f}{\theta(1 - \frac{\gamma^2}{\beta})}$ e $Y > \varphi(X)$, teremos $(Y - \bar{Y})'(X) > 0$. Neste caso

também temos que $\lim_{X \rightarrow \pm\infty} \varphi(X) = +\infty$. Além disso, para X suficientemente pequeno tem-se $f e^{-X} < \bar{Y}(X)$, logo $\varphi(X) < \bar{Y}(X)$.

O discriminante Δ do trinômio (B.1) é positivo para X suficientemente pequeno. Logo teremos $(f e^{-X} - Y)\varphi'' > 0$ desde que $\omega > \bar{\omega} = \frac{-(\gamma + f e^{-X}) + \sqrt{\Delta}}{2}$.

Na região onde $\dot{X} < 0$, a desigualdade anterior é equivalente a $(\gamma + \bar{\omega})Y < k - \beta X - \frac{\beta}{\theta} f e^{-X}$. Como $\lim_{X \rightarrow -\infty} (\gamma + \bar{\omega}) = \gamma + \frac{\beta}{\theta} = \frac{\theta c \delta}{\theta(1 - \delta c)} < 0$ concluimos que $Y'' < 0$ na região onde $\dot{X} < 0$, X suficientemente pequeno e $Y > \psi(X)$ onde

$$\psi(X) = \frac{k - \beta X - \frac{\beta}{\theta} f e^{-X} + \bar{\omega} f e^{-X}}{\gamma + \bar{\omega}}$$

Observamos ainda que, para X suficientemente pequeno, $\psi(X) < \bar{Y}(X)$

Podemos assim concluir que para $\theta c - b < 0$ e $1 - \delta c < 0$ não existem trajetórias de hiperinflação.

Com a mesma mudança de coordenadas e as notações do apêndice A, (6), (7) transforma-se em

$$\begin{cases} \dot{X} = u - y \\ \dot{Y} = -k + \beta X + \gamma Y + \frac{\beta u}{\theta} \end{cases}$$

Suas soluções não admitem assíntota vertical nem horizontal, logo no caso $1 - \delta c < 0$ existem trajetórias de hiperinflação e de hiperdeflação.

No caso $1 - \delta c > 0$, $\theta c - b > 0$ e $\gamma^2 < \beta$ estudamos a distância entre $Y = Y(X)$ e $\bar{Y}(X) = \frac{k - \beta X - \beta u / \theta}{\gamma}$ onde $Y = Y(X)$ representa uma solução e a

curvatura de $Y=Y(X)$. Levando em conta que, pelo Critério de Bendixon não existem órbitas periódicas não triviais, podemos descrever o comportamento das soluções como mostra a Figura 8 e concluir que existe um processo cíclico instável.

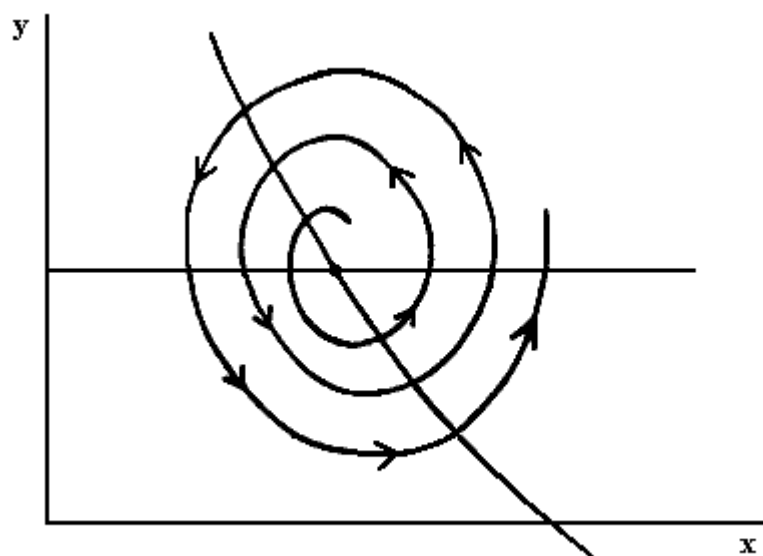


Figura 8